PREMIERE EPREUVE DE

MATHEMATIQUES *(Durée : 3 h 00 - Coefficient : 7)*

On veillera à justifier tous les résultats.

Dans tout le problème, $\ell n(x)$ désigne le logarithme népérien de x.

On note ∞ pour $+\infty$.

PREMIERE PARTIE

1°) Soient $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ et $\sum_{i=0}^{\infty} b_i$ deux séries convergentes telles que :

(A) $a_i > 0$ et $b_i > 0$ pour tout $i \geqslant 0$

(B) $\sum_{i=0}^{\infty} a_i \geqslant \sum_{i=0}^{\infty} b_i$

a) Soit x un réel. Montrer que :

si $x \geqslant 1$ alors $1 - \frac{1}{x} + \frac{(x-1)^2}{2x^2} \leqslant \ell n(x) \leqslant x - 1 - \frac{(x-1)^2}{2x^2}$

si $0 < x \leqslant 1$ alors $1 - \frac{1}{x} + \frac{(x-1)^2}{2} \leqslant \ell n(x) \leqslant x - 1 - \frac{(x-1)^2}{2}$

Remarque : il est alors immédiat que quel que soit $x>0$,

$$1 - \frac{1}{x} \leqslant \ell n(x) \leqslant x - 1$$

et que $\ell n(x) = x-1$ si et seulement si $x=1$.

(on ne demande pas de justifier ceci).

b) Montrer que la limite $\lim_{N \to \infty} \sum_{i=0}^{N} a_i \ell n(a_i/b_i)$ existe (nulle ou positive ou infinie).

Dans la suite du problème, on notera cette limite :

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i \ell n(a_i/b_i)$$

c) Montrer que $\sum_{i=0}^{\infty} a_i \ell n(a_i/b_i) = 0 \Rightarrow a_i = b_i$ pour tout $i \geqslant 0$.

d) On fait l'hypothèse additionnelle suivante :

(C) $a_i \leqslant 1$ et $b_i \leqslant 1$ pour tout $i \geqslant 0$

Montrer l'inégalité :

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i (a_i - b_i)^2 \leqslant 2 \sum_{i=0}^{\infty} a_i \ell n(a_i/b_i)$$

2°) On dit qu'une fonction G, continûment dérivable sur un intervalle $]a,b[$ est convexe sur $]a,b[$ si sa dérivée G' est monotone non décroissante sur $]a,b[$.

a) Montrer que si G est continûment dérivable et convexe sur $]a,b[$, alors, pour tout $\mu \in]a,b[$, on a l'inégalité :

$$G(x) \geqslant G(\mu) + (x-\mu)\, G'(\mu) \qquad \text{pour } a < x < b$$

b) Soit f une fonction continue positive ou nulle sur $]-\infty,+\infty[$ telle que l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$ soit absolument convergente.

On suppose que f n'est pas identiquement nulle.

- Vérifier que l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ est convergente.
- Soit G une fonction continûment dérivable et convexe sur $]-\infty,+\infty[$.

Montrer que si l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} G(x)f(x)dx$ converge et si

$$\mu = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx}$$

alors $\int_{-\infty}^{\infty} G(x)f(x)dx \geqslant G(\mu)\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$

- Montrer que sous les hypothèses précédentes, l'égalité

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(x)f(x)dx = G(\mu)\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

a lieu si et seulement si $G(x) = G(\mu) + (x-\mu)\, G'(\mu)$

en tout x tel que $f(x) > 0$.

T.S.V.P.

c) Soient f et h deux fonctions continues positives ou nulles sur un intervalle]a,b[telles que les intégrales $\int_a^b f(x)dx$ et $\int_a^b h(x)f(x)dx$ soient convergentes.

Soit G une fonction continûment dérivable sur $[0,+\infty[$ et convexe sur $]0,+\infty[$.

On suppose que f n'est pas identiquement nulle.

Montrer l'existence de $\mu \in [a,b]$ tel que :

$$h(\mu) = \frac{\int_a^b h(x)f(x)dx}{\int_a^b f(x)dx}$$

Montrer que, si $\int_a^b G(h(x))f(x)dx$ converge, alors :

$$(D) \quad \int_a^b G(h(x))f(x)dx \geq G(h(\mu)) \int_a^b f(x)dx$$

Quand a-t-on l'égalité dans (D) ?

d) On considère deux fonctions continues f et g strictement positives sur l'intervalle]a,b[telles que les intégrales $\int_a^b f(x)dx$ et $\int_a^b g(x)dx$ convergent et vérifient :

$$\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx$$

Déduire des résultats précédents l'inégalité

$$\int_a^b f(x)\ \ell n(f(x)/g(x))dx \geq 0$$

vérifiée chaque fois que l'intégrale du membre de gauche converge.

(On vérifiera que la fonction $t \to -\ell n(t)$ est convexe sur $]0,+\infty[$).

e) Sous les hypothèses du 2°) d), montrer que

$$\int_a^b f(x)\ \ell n(f(x)/g(x))dx = 0$$

si et seulement si $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in]a,b[$.

DEUXIEME PARTIE

Soit f une fonction continue strictement positive sur l'intervalle]a,b[.

On suppose de plus que $f(x) = 0$ pour tout $x \notin]a,b[$ et que :

$$(i) \quad \int_a^b f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

On conviendra dans toute la suite que la fonction $x \mapsto x\ \ell n(x)$ est prolongée par continuité en x = 0. On appelle *entropie* de f, le nombre, noté I_f, défini par

$$I_f = -\int_a^b f(x)\ \ell n(f(x))dx$$

lorsque cette intégrale converge.

1°) On suppose dans cette question que a = 0 et b = 1.

On note e la base des logarithmes népériens.

a) Soit $f(x) = \frac{1}{x}\lambda_\alpha\ \ell n^\alpha(e/x)$ pour $0<x<1$.

Déterminer les valeurs de α et de λ_α pour lesquelles $\int_0^1 f(x)dx$ est convergente et égale à 1. Pour quelles valeurs de α, I_f est-elle finie ?

b) Montrer que, si I_f est finie, alors $I_f \leq 0$.

(On se servira des résultats de la PREMIERE PARTIE).

c) Montrer que I_f est maximale et vaut zéro si et seulement si $f(x) = 1$ pour tout x tel que $0<x<1$.

2°) On suppose dans cette question que a = 0 et $b = +\infty$.

On suppose qu'en plus de (i), la fonction f vérifie :

$$(ii) \quad \int_0^\infty x\ f(x)dx = 1$$

Tournez la page S. V. P.

ECOLES MILITAIRES:ECOLE de l'AIR
commune-Math 1
page 181
1987

a) Soit $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ pour $x>0$. Déterminer les valeurs de λ telles que f vérifie (i) et (ii).

b) Soit f une fonction continue strictement positive arbitraire sur $]0,+\infty[$ qui satisfasse (i) et (ii).

Montrer que, si I_f est finie, alors $I_f \leqslant 1$.

c) Déterminer les fonctions f continues strictement positives sur $]0,+\infty[$, vérifiant (i) et (ii), et telles que $I_f = 1$.

3°) On revient au cas général d'un intervalle quelconque $]a,b[$ et d'une fonction f continue strictement positive sur $]a,b[$ et vérifiant (i). On suppose de plus que la fonction f vérifie :

$$\text{(iii)} \qquad \int_a^b h_i(x)f(x)dx = \mu_i \qquad \text{pour } i = 1,\ldots,m$$

où $m \geqslant 1$ est un nombre entier fixé et où $h_1,\ldots,h_m$ sont des fonctions continues sur l'intervalle $]a,b[$, les intégrales définissant $\mu_1,\ldots,\mu_m$ étant supposées simplement convergentes et $\mu_1,\ldots,\mu_m$ étant fixés.

a) Montrer que, s'il existe des constantes $a_0,\ldots,a_m$ telles que :

$$\text{(iv)} \quad \begin{cases} \displaystyle\int_a^b e^{(a_0+a_1h_1(x)+\ldots+a_mh_m(x))}dx = 1 \\ \displaystyle\int_a^b h_i(x)\, e^{(a_0+a_1h_1(x)+\ldots+a_mh_m(x))}dx = \mu_i \end{cases}$$

pour $i = 1,\ldots,m$

et si I_f est finie, alors $I_f \leqslant -(a_0+a_1\mu_1+\ldots+a_m\mu_m)$.

Etablir que cette borne supérieure est atteinte pour une fonction f continue strictement positive sur l'intervalle $]a,b[$ vérifiant (i) et (iii).

b) On considère le cas où $a = -\infty$ et $b = +\infty$. On admettra l'identité :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\,dx = 1$$

En déduire la valeur de $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2/2}\,dx$ et $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} x^2e^{-x^2/2}\,dx$.

On suppose que f continue strictement positive sur $]0,+\infty[$ vérifie (i) et (iii) avec m=2, $h_1(x) = x$ et $h_2(x) = x^2$.

Déterminer la valeur maximale possible de I_f (lorsqu'elle est définie) et les fonctions f continues strictement positives sur $]0,+\infty[$ pour lesquelles ce maximum est atteint.

---==0000==---